110. 完全正則空間のビコムパクト擴大

小樽経専　武隈良一（1948.V.21）

空間Rのビコムパクト擴大 bR としては著名な二つの空間即ち *Wallman* の ωR 空間と *Čech* の βR 空間とがある。前者は R が T_1 空間にして ωR も T_1 空間。後者は R が完全正則空間にして βR は正規空間である。若し R が正規ならば ωR と βR とは一致するが R が完全正則なるとき両者は異なり次の関係が成立する。

<u>定理A.</u>　ωR から βR の上へ R の点を不変に保つやうな連續写像 h が存在する。

この定理の證明を小松氏が述べられてますが（紙上談話会第2輯第8号）*Zerlegungsraum*（分解空間）の理論を使って *Alexandroff*（*Recueil Math.* 5(47) 1939）が證明したものを以下に述べて見る。これは原文がロシ

---

* *On the Theory of bicompact Extensions of topological Spaces. Comptes Rendus, URSS. 1943.. V 38*

ヤ語なので余り知られてないと思ひ紹介の筆をとる次第。以下原文から直接に。

§ 1

先づ T_1 空間 $\mathbb{T}$ のハウスドルフ分解*(*Zerlegung*)P とは $\mathbb{T}$ を互に相交はらぬ閉集合(之を P の元と呼ぶ)の和に分解したとき そのニつ A A' に對して $\Gamma \supset A$, $\Gamma' \supset A'$ なる如き互に相交はらぬ開集合(即ち A. A' の近傍)が見出されるものをいふ。こゝに Γ. Γ' は分解 P の元の和である。

今與へられた T_1 空間 $\mathbb{T}$ の凡てのハウスドルフ分解 P_α を考へそれから作られる $A_0 = \prod A_\alpha$ なる型の凡ての空ならざる閉集合族 P_0 を考へやう。こゝに共通部分の記号 $\prod$ は空間 $\mathbb{T}$ の各ハウスドルフ分解 P_α から一つの元を取出してつくつた積を表はす。然るとき P_0 が又ハウスドルフ分解になることが容易に証明される。而てこの P_0 は極小ハウスドルフ分解である。極小とは他の凡てのハウスドルフ分解の再分割になつてゐることを意味する。即ち他のハウスドルフ分解の元は P_0 の元のいくつかの和になつてゐる。

今分解 P の元を点と考へたときその点全体の作る空間を分解空間 Z_P と名付けやう。空間 Z_P は分解 P がハウスドルフなるとき而てこのときにのみハウスドルフである。** 各点 $a \in \mathbb{T}$ にこの点を含む分解 P の元を對應させると $\mathbb{T}$ の Z_P の上への連続寫像 h_P を得る。分解 P_0 に對應する空間 Z_{P_0} を $\mathbb{T}_h$ と名付け $\mathbb{T}$ の $\mathbb{T}_h$ の上への寫像を簡單のために h で表はす。然るとき次の定理が成立する。

定理1　ハウスドルフ空間 $\mathbb{T}_h$ は $\mathbb{T}$ の連続像である。而て $\mathbb{T}$ の連続像を表はす凡てのハウスドルフ空間は $\mathbb{T}_h$ の連続像として表はし得る。尚 $\mathbb{T}$ がビコムパクトならば $\mathbb{T}_h$ も又ビコムパクトである。

§ 2

さて R を完全正則空間としやう。$\mathbb{T}$ を ωR にとつたときビコムパクトハウスドルフ空間 $\mathbb{T}_h = \omega R_h$ を考へることにする。

定理2　空間 ωR の空間 ωR_h への寫像 h により ωR の部分空間 R に位相

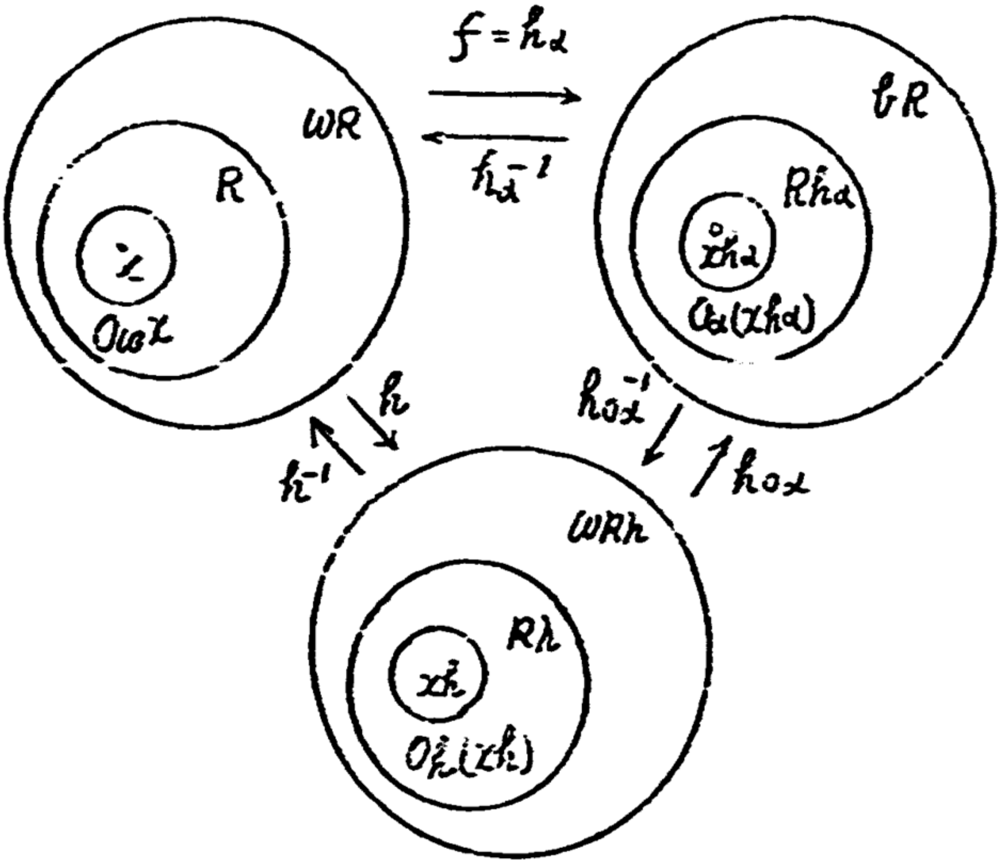
---

* *Alexandroff-Hopf. Topologie.* I. Kap I §5. §6.6 Kap. II §2 參照

** *Alexandroff-Hopf Topologie* I. S. 70 參照

的に写像される。

証明　Rは完全正則なる故Rのビコムパクト拡大bRは存在する。ωRのbRの上への連続写像fとRの凡ての点を不変に保つものをωRの$bR = Z_{P_\alpha}$の上への写像h_αと考へる。写像h_αはRの上で位相的なるを以て分解P_αの元はRの点を一点以上含まない。このことは極小分解P_0の元に対しても成立するのでωRのωRhの上への連続写像hはRの上では一対一の写像になる。



ωRhの部分空間Rhを写像hによるRの像とし　$x \in R \leq \omega R$

$$xh = h(x) \in Rh \leq \omega Rh$$

$$xh_\alpha = h_\alpha(x) \in Rh_\alpha \leq Z_{P_\alpha}$$

とす。ωRに於て任意の近傍$O_\omega x$を取出すときRh_αからRの上へ定義された位相写像h_α^{-1}により　$h_\alpha^{-1}(Rh_\alpha \cdot O_\alpha(xh_\alpha)) \leq O_\omega x$

たる如き点xh_αの近傍$O_\alpha(xh_\alpha)$を見出すことが出来る。空間ωRhのZ_{P_α}の上への連続写像$h_{0\alpha}$により

$$h_{0\alpha}(Rh \cdot O_h(xh)) \leq Rh_\alpha \cdot O_\alpha(xh_\alpha)$$

なる如きωRhに於ける点xhの近傍$O_h(xh)$を得。故に、

$$h_\alpha^{-1} h_{0\alpha}(R_h \cdot O_h(x_h)) \fallingdotseq O_{\omega x}$$

而て $h_\alpha^{-1} h_{0\alpha} = (h_{0\alpha}^{-1} \cdot h_\alpha)^{-1}$ は h^{-1} と一致する。

$R_h \cdot O_h(x_h)$ は R_h に関して点 $x_h \in R_h$ の

近傍なるを以て h^{-1} は R_h の R の上への連続写像なることが証明された。Q.E.D

今点 $x \in R \leqq \omega R$ とその像 $x_h \in R_h \leqq \omega R_h$ 即ち点 x を含む分解 P_0 の元とを同一視することに規約すると $R = R_h$ を ωR_h の部分空間と考へることが出来る。

定理3　ωR_h は $P = R_h$ のビコムパクト拡大である。

証明　　空間 ωR_h の凡ての開集合は ωR の開集合 Γ の合併である処の P_0 の元の集合であつてそれ自身の中に特に P_0 の元を含む。而てその元の上に P に含まれる R の点が存在する。故に $R = R_h$ は ωR_h に於て dense である。従て ωR_h は $R = R_h$ の拡大である。ωR は而てビコムパクトなる故 ωR_h も本定理1によりビコムパクトである。即ち ωR_h は R のビコムパクト拡大である。　　Q.E.D

$\beta R = Z_{P_\alpha}$ を R のビコムパクト拡大とし P_α を ωR のハウスドルフ分解とす。R のすべての点を不変に保ちつゝ ωR を βR の上に対応させる連続写像を $f = h_\alpha$ とす。R の点をそれを含む P_α の元と同一視すると ωR_h を $\beta R = Z_{P_\alpha}$ の上への写像 $h_{0\alpha}$ は R の凡ての点を不変に保つことが出来る。

以上により ωR_h は R のビコムパクト拡大にして R の点を不変に保ちつゝ R の凡てのビコムパクト拡大の上に連続に写像することが出来る。これ即ち ωR_h は βR なることを示す。(理由は原論文§2の定理II及びIIIによる)　依て定理Aが成立する。　　　(終り)